



INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

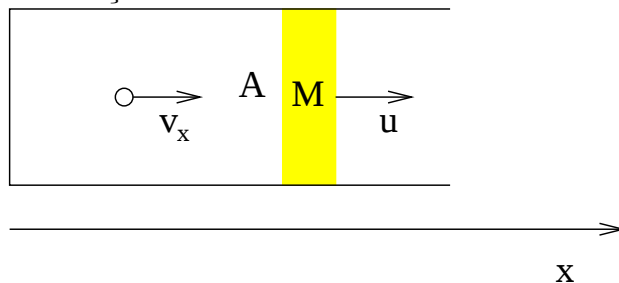
Curso de Termodinâmica-GFI 00175

2º semestre de 2016

Prof. Jürgen Stilck

Solução do exercício 3-1

A situação descrita no enunciado está ilustrada abaixo:



a)

No referencial do pistão, que se move para a direita com velocidade u , consideremos a colisão elástica de uma molécula com componente horizontal v_x no referencial do laboratório com o pistão, no limite em que a massa do pistão M é muito maior que a massa m da molécula. No referencial do pistão, as componentes horizontais da velocidade antes e depois da colisão são:

$$v'_a = v_x - u$$

$$v'_d = u - v_x$$

No referencial do laboratório, teremos $v_d = 2u - v_x$. A variação da energia cinética da molécula no referencial do laboratório será:

$$\Delta K = \frac{1}{2}m[(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - ((2u - v_x)^2 + v_y^2 + v_z^2)] \approx -2muv_x,$$

onde, na última passagem, usamos o fato de que $u \ll v_x$.

b)

As moléculas com componente da sua velocidade $v_x > u$ que colidem com o pistão num intervalo de tempo dt são as que estão no cilindro de altura $(v_x - u)dt$. Se ρ for o número de moléculas por unidade de volume, o número de moléculas que colidem no intervalo de tempo dt será:

$$dN = \rho(v_x - u)A dt \approx \rho v_x A dt.$$

Se o número total de moléculas for N e a posição do pistão for x , termos $\rho = N/(Ax)$, e no intervalo de tempo dt o pistão se desloca de $dx = u dt$, logo:

$$dN = N \frac{v_x}{u} \frac{dx}{x}.$$

A perda de energia cinética nesse intervalo será igual a $-2muv_x dN$, ou seja:

$$\delta K = -2Nm v_x^2 \frac{dx}{x}.$$

Para obter a perda total de energia cinética no intervalo de tempo dt , devemos integrar sobre todas as velocidades, usando a distribuição $f(\vec{v})$:

$$dK = -2Nm \frac{dx}{x} \int_{v_x=u}^{\infty} \int_{v_y=-\infty}^{\infty} \int_{v_z=-\infty}^{\infty} f(\vec{v}) v_x^2 d^3v,$$

aproximando o limite inferior da primeira integral para 0 e usando o fato de que a distribuição de velocidades é invariante sob reflexão, obtemos $dK = -Nm \langle v_x^2 \rangle dx$. Como a distribuição de velocidades é isotrópica,

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle,$$

de maneira que a energia cinética total é $K = \frac{3}{2}m \langle v_x^2 \rangle$ e:

$$\frac{dK}{dx} = -\frac{Nm}{x} \langle v_x^2 \rangle = -\frac{2}{3x} K,$$

ou seja:

$$\frac{dK}{K} = -\frac{2}{3} \frac{dx}{x}.$$

Integrando entre a situação inicial e final, obtemos:

$$\ln \frac{K_f}{K_i} = -\frac{2}{3} \ln \frac{x_f}{x_i},$$

ou seja:

$$\frac{K_f}{K_i} = \left(\frac{x_i}{x_f} \right)^{2/3}. \quad (1)$$

Para comparar esse resultado com o que sabemos da termodinâmica, consideramos a expansão adiabática de um gás ideal monoatômico. O fato de ser um gás ideal está implícito ao desprezarmos interações entre as moléculas, e ele é monoatômico pois supomos que a energia interna do gás é apenas a energia cinética de translação das moléculas. Num processo desse tipo, o trabalho realizado pelo gás é:

$$W = -\frac{1}{\gamma - 1} p_i V_i [(V_i/V_f)^{\gamma-1} - 1] = -\frac{3}{2} N R T_i [(x_i/x_f)^{2/3} - 1],$$

pois $\gamma = 5/3$, $pV = NRT$ e $V = Ax$. Da eq. (1), vemos que

$$K_f - K_i = K_i(K_f/K_i - 1) = K_i[(x_i/x_f)^{2/3} - 1],$$

que corresponde exatamente a $-W$, se lembrarmos que $U = (3/2)NRT = (3/2)pV$ para o gás ideal monoatômico.